

Superficies

$$S = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / \exists (u,v) \in B, \vec{x} = \vec{\sigma}(u,v) \}$$

$$\text{con } \vec{\sigma}(u,v) : A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (u,v) \longrightarrow \vec{\sigma}(u,v)$$

• Vectores Tangentes en (u_0, v_0)

$$\hat{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{1}{\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \|}$$

$$\hat{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{1}{\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \|}$$

• Vector Normal a la superficie

$$\hat{N} = \hat{t}_u \times \hat{t}_v \cdot \frac{1}{\| \hat{t}_u \times \hat{t}_v \|}$$

• Area de una superficie e Integral de Superficie

$$\text{Area}(S) = \iint_B \underbrace{\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \|}_{dA} du dv \Rightarrow \iint_S f dA = \iint_B f(\vec{r}(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

• Integral de Flujo

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dA = \iint_B \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \Big|_{u,v} du dv$$

• Teorema de la Divergencia (Gauss)

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}, \quad \vec{F} = f_1 \hat{x} + f_2 \hat{y} + f_3 \hat{z}$$

$$\iint_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \hat{N} dA = \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{F} \cdot dV = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dV$$

• Teorema de Stokes

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \oint_{\Gamma = \partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

\downarrow
 Γ borde de S

• Teorema de Green

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma = \partial S} f_1 dx + f_2 dy$$

• Fórmula de integración por partes

$$\iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \vec{F} dV = \iint_{\partial \Omega} f \cdot \vec{F} \cdot \vec{n} dA - \iiint_{\Omega} f \cdot \nabla \vec{F} dV$$

Problemas

3

P1) Utilizando el teorema de Green, probar que el área de una región A con frontera M se puede calcular por la siguiente expresión:

$$A(S) = \frac{1}{2} \oint_M x dy - y dx$$

Aplicar esta fórmula para calcular el área S que es interior de $|x| + |y| = 4$ y exterior a $x^2 + y^2 = 1$

Sol) a) Del teorema de Green: $\oint_M \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$

Notando que:

$$\frac{1}{2} \oint_M x dy - y dx = \frac{1}{2} \oint_M \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{si } \vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad [d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}]$$

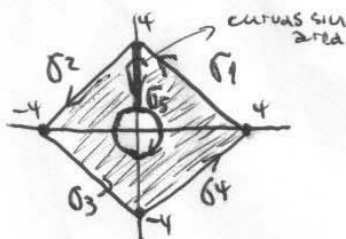
Entonces, aplicando Green a $\frac{\vec{F}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \oint_M \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{2} \iint_A \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \oint_M \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \iint_A [1 - (-1)] dx dy = \frac{1}{2} \iint_A 2 dx dy = \iint_A dx dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \oint_M x dy - y dx = \underbrace{\iint_A dx dy}_{dS} = A(S)$$

b)



$$A(S) = \frac{1}{2} \oint_M x dy - y dx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \oint_{\sigma_i} x dy - y dx + \frac{1}{2} \oint_{\sigma_5} x dy - y dx$$

$$\text{[5]} \quad \begin{aligned} x &= \cos \theta \Rightarrow dx = -\sin \theta d\theta \\ y &= \sin \theta \Rightarrow dy = \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \oint_{\sigma_5} x dy - y dx = - \oint_{\sigma_5} x dy - y dx$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial S} x dy - y dx = - \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = -2\pi$$

y para las otras curvas

$$\textcircled{P1}) \begin{matrix} x=4-t \\ y=t \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} dx=-dt \\ dy=dt \end{matrix} \quad t \in (0,4) \quad \int_{\Gamma_1} x dy - y dx = \int_0^4 (4-t) dt + t dt = 16$$

$$\textcircled{P2}) \begin{matrix} x=-t \\ y=4-t \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} dx=-dt \\ dy=-dt \end{matrix} \quad t \in (0,4) \quad \int_{\Gamma_2} x dy - y dx = \int_0^4 t dt + (4-t) dt = 16$$

$$\textcircled{P3}) \begin{matrix} x=4+t \\ y=-t \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} dx=dt \\ dy=-dt \end{matrix} \quad t \in (0,4) \quad \int_{\Gamma_3} x dy - y dx = \int_0^4 (4-t) dt + t dt = 16$$

$$\textcircled{P4}) \begin{matrix} x=t \\ y=-4+t \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} dx=dt \\ dy=dt \end{matrix} \quad t \in (0,4) \quad \int_{\Gamma_4} x dy - y dx = \int_0^4 t dt + (4-t) dt = 16$$

$$\text{Luego, } A(S) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy + y dx \Rightarrow A(S) = \frac{1}{2} (16 \cdot 4 - 2\pi)$$

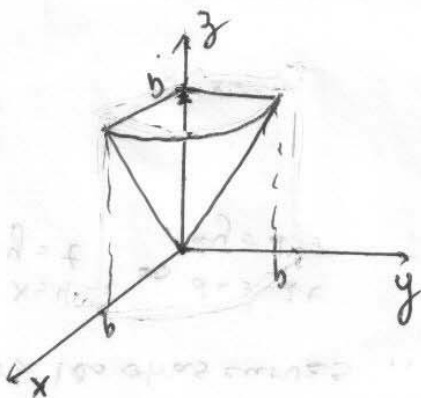
$$\Rightarrow \boxed{A(S) = 32 - \pi}$$

P2) i) Usando el teorema de la divergencia, calcule el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (zx^2, 2yz^3, xyz)$ a través de las caras de la superficie $x^2 + y^2 \leq z^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \in [0, b]$, $b > 0$.

Sol) Si quisieramos calcular el flujo por definición, deberíamos entonces considerar la integral sobre las 4 superficies del cuarto de cono, asumiendo que la normal a cada superficie es la exterior (que sale del cono).

Por definición sería

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dA \quad (*)$$



(5)

Es decir

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint \vec{F} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)}_{\vec{n}} \cdot \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|}_{dA} du dv$$

Sin embargo, nos piden hacerlo por Gauss

luego $\iint_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$, donde Ω es el volumen del cono

Calculamos entonces el lado derecho, parametrizando en coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq z^2 &\Rightarrow \begin{aligned} x &= \rho \cos \sigma \\ y &= \rho \sin \sigma \\ z &= z \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \rho &\leq z \\ \rho &\in [0, z] \\ z &\in [0, b] \end{aligned} \end{aligned}$$

y la divergencia de \vec{F}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial (zx^2)}{\partial x} + \frac{\partial (zy^2)}{\partial y} + \frac{\partial (xy^2)}{\partial z} = 2xz + 6y^2 + xy$$

luego

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV &= \iiint_{\Omega} (2xz + 6y^2 + xy) dx dy dz \\ &= \int_0^b \int_0^z \int_0^{\pi/2} (2\rho z \cos \sigma + 6\rho^2 \sin^2 \sigma + \rho^2 \sin \sigma \cos \sigma) \rho d\sigma d\rho dz \\ &= \int_0^b \int_0^z \left[2\rho z \sin \sigma \Big|_0^{\pi/2} + 6\rho^2 \int_0^{\pi/2} 1 - \cos 2\sigma d\sigma + \frac{\rho^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\sigma d\sigma \right] \rho d\rho dz \\ &= \int_0^b \int_0^z \left[2\rho^2 z + \frac{3}{2}\rho^3 \pi - 3\rho^3 \frac{\sin 2\sigma}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\rho^3}{4} \cos \sigma \Big|_0^{\pi/2} \right] d\rho dz \\ &= \int_0^b \int_0^z \left[2\rho^2 z + \frac{3}{2}\pi \rho^3 + \frac{\rho^3}{2} \right] d\rho dz = \int_0^b \left[\frac{2}{3}\rho^3 z + \frac{3}{8}\pi \rho^4 + \frac{\rho^4}{8} \right] dz \end{aligned}$$

②

Luego, el flujo sobre la superficie del cono es

$$\iint_{\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \frac{2}{15} b^5 + \frac{3}{40} \pi b^5 + \frac{b^5}{40} = \frac{19b^5}{120} + \frac{3}{40} \pi b^5$$

ii) Calcule el flujo del campo \vec{F} en el "cono de helado" (sin tapa) usando la parte anterior.

Ya tenemos que $\iint_{\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = (\Phi)$.

y sabemos que

$$\iint_{\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_{\text{TAPA}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA + \iint_{\substack{\text{CONO} \\ \text{ABIERTO}}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA.$$

$$\Rightarrow \iint_{\substack{\text{CONO} \\ \text{ABIERTO}}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_{\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA - \iint_{\text{TAPA}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Entonces, en la tapa, $x = \rho \cos \sigma$
 $y = \rho \sin \sigma$ y $\hat{n} dA = \hat{k} \cdot \rho d\rho d\sigma$
 $z = b$
 $\rho \in (0, b)$
 $\sigma \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{F} \cdot \hat{n} \rho d\rho d\sigma &= (xyz) \cdot \rho d\rho d\sigma \\ &= b \rho^2 \sin \sigma \cos \sigma d\rho d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_{\text{TAPA}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA &= \int_0^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \rho^3 \sin \sigma \cos \sigma d\rho d\sigma \\ &= b \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^b \cdot \left. \frac{-\cos 2\sigma}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{b^5}{8} \end{aligned}$$

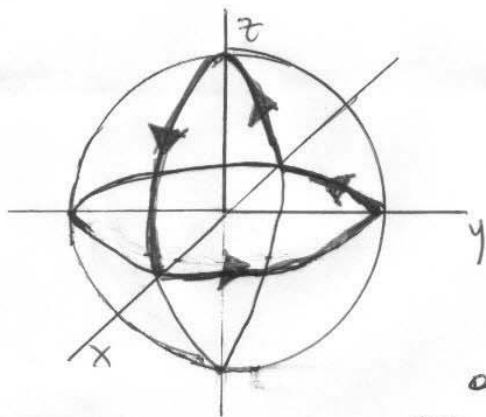
$$\Rightarrow \iint_{\substack{\text{CONO} \\ \text{ABIERTO}}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \frac{3}{40} \pi b^5 + \frac{b^5}{30}$$

P3) Calcule la circulación del campo

(7)

$\vec{F}(x,y,z) = (6zy^2 + \cos^2 x, xz \sin xz + 2x^3, xy \sin(xy) - 2x^3)$
a lo largo de la curva de la figura (sobre la esfera de radio 1)

Sol)



Debido al campo \vec{F} , y la parametrización que necesitaríamos para describir la curva, calcular $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es muy difícil.

Sin embargo, podemos aplicar Stokes para la curva, que por lo que vemos, encierra dos semicírculos de radio unitario

Ocupemos entonces

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A}, \text{ notando que la integral de línea debe ser sobre una curva cerrada.}$$

Notamos que el problema es equivalente a calcular $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sobre cada superficie con curvas cerradas y luego sumarlos, anulándose las curvas agregadas para encerrar las áreas



Es decir

$$\oint_{C1 \cup C2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

A cada integral le aplicamos Stokes

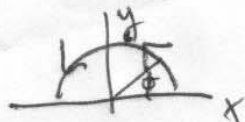
\Rightarrow Área encerrada por $C1$: $x^2 + z^2 \leq 1$



$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= 0 \\ z &= r \sin \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &\in [0,1] \\ \phi &\in [\pi, 0] \text{ y } \hat{n} = \hat{j} \\ &\hookrightarrow \text{empieza en } x = -1!! \end{aligned}$$

y Area encerrada por C_2 : $x^2 + y^2 \leq 1$



$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi & r &\in [0, 1] \\ y &= r \sin \phi & \phi &\in [0, \pi] \\ z &= 0 \end{aligned} \quad \text{y } \hat{n} = \hat{k}$$

Usamos entonces $\oint_{C_1 \cup C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S(C_1)} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA + \iint_{S(C_2)} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA$

Calculamos $\vec{\nabla} \times \vec{F} =$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 6zy^2 + \cos^2 x & xz \sin(xz) + 2x^3 & xy \sin(xy) - 2x^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy) - x \sin(xz) - x^2 z \cos(xz) \\ 6y^2 - y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy) + 6x^2 \\ z \sin(xz) + xz^2 \cos(xz) + 6x^2 - 12zy \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_{S(C_1)} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{j} dS_1 + \iint_{S(C_2)} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{k} dS_2 \\ &= \iint_{S_1} (6y^2 + 6x^2 - y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy)) dx dy \quad (y=0) \\ &\quad + \iint_{S_2} (z \sin(xz) + xz^2 \cos(xz) + 6x^2 - 12zy) dx dy \quad (z=0) \\ &= \iint_{S_1} 6x^2 dx dy + \iint_{S_2} 6x^2 dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi 6r^3 \cos^2 \phi d\phi dr + \int_0^1 \int_0^\pi 6r^3 \cos^2 \phi d\phi dr = 0 // \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$